Министерство образования и молодежной политики
Республики Коми
"Сыктывкарский политехнический техникум"

Методическое пособие
по математике

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Основные теоретические положения

Сыктывкар 2016

Составитель: преподаватель Орлова Светлана Владимировна
Одобрено на заседании ЦК______________ протокол № _____
от _________________________

Пояснительная записка

Данное методическое пособие предназначено для студентов "Сыктывкарского политехнического техникума" и содержит материал включающий основные понятия исследования функции

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Понятие функции, известное нам из курсов математики и физики средней школы, представляет собой одно из основных математических понятий, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления. Например, с процессом расширения при нагревании металлического стержня связаны две величины: температура среды – переменная величина, которая независимо меняется в некоторых пределах, и длина стержня, которая зависит от температуры. Для характеристики описания данного процесса необходимо указать, какие значения длины стержня соответствуют различным значениям температуры. В таком случае говорят, что длина стержня является функцией от температуры. Рассмотрим еще один пример. Если при постоянной температуре изменить объем, занимаемый газом, то давление газа на стенки сосуда тоже будет меняться. Следовательно, при постоянной температуре давление газа является функцией от объема. Если же менять и температуру, то давление будет зависеть, или, как говорят, будет функцией, от двух переменных – объема и температуры. Настоящее пособие посвящено изучению, исследованию и построению графика функции одной независимой переменной.

Пусть даны два непустых множества X и $У$.

Определение. **Соответствие, которое каждому элементу x из X ставится в соответствие один и только один элемент y из $У$, называется функцией, определенной на множестве X со значениями в $У$.**

Для обозначения функций используются буквы f, g, h и т.д. Если функция f ставит элементу x из множества X в соответствие элемент y из $У$, то это записывают следующим образом: $y = f(x)$.

Определение. **Множество X называется областью определения (или существования) функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех y из $У$, для которых существует хоть один x из X такой, что $y = f(x)$, называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.**

Определение. **Функция $f(x)$ называется числовой функцией, если ее область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$ являются подмножеством множества действительных чисел R.**

В дальнейшем будем рассматривать только числовые функции.

Определение. **Графиком числовой функции $y = f(x)$ называется множество всех точек $(x; y)$ плоскости $0xy$, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$, т.е. это множество точек $(x; f(x))$.**

Как правило, графиком функции служит некоторая линия.

Определение. **Функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной), если ее область определения $D(f)$ симметрична относительно начала координат (т.е. $f(x)$ и $f(-x)$ одновременно определены) и для всех x из $D(f)$ имеет место равенство**

$$f(-x) = f(x)$$
$$(f(-x) = -f(x)).$$

Например, функция $y \quad 3^{2-x^2}$ является четной, так как

$$y(-x) = 3^{2-(-x)^2} = 3^{2-x^2} = y(x);$$

а функция

$$y = \frac{x^3}{1+x^2}$$

является нечетной (убедиться самостоятельно).

Определение. **Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида.**

Так, $f(x) = 3x + 2$, $f(x) = 2^x$ – функции общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси $0y$ (рис. 1.1), график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 1.2).

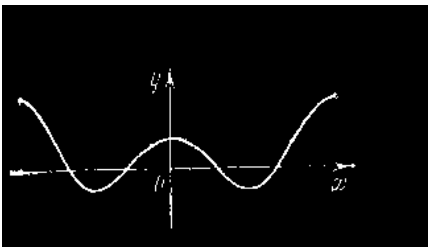


Рис. 1.1

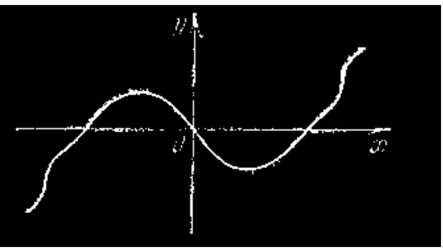


Рис. 1.2

Определение. **Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу,**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Определение. **Функция $y = f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется убывающей на интервале $(a;\ b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу,**

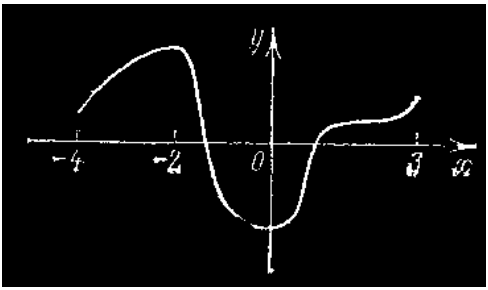
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Определение. **Функция $y = f(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется неубывающей (невозрастающей) на интервале $(a;\ b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу,**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$
$$(f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Определение. **Интервалы, в которых функция либо только возрастает (не убывает), либо только убывает (не возрастает), называются интервалами монотонности.**

Например, функция, заданная своим графиком на рис. 1.3 возрастает на интервале (–4; –2), убывает на интервале (–2; 0), на интервале (0; 3) она не убывает.



Р и с. 1.3

Определение. **Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \ne 0$, что если для некоторого x определено $f(x)$, то определены и $f(x \pm T)$ и имеет место равенство**

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Число T называется периодом функции $f(x)$. Периодическую функцию достаточно изучить на отрезке, длина которого равна одному периоду, и полученные сведения распространить на всю область определения. К периодическим функция относятся известные из курса средней школы тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

2. ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ.

Необходимые условия возрастания (убывания) функции на интервале определяются следующими теоремами.

Теорема 1 (необходимое условие возрастания функции). **Если дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in$ (a; b), возрастает на интервале (a; b), то $f'(x_0) \geq 0$ для любого $x_0 \in$ (a; b).**

Из определения возрастающей функции имеем: для любых $x_0 \in$ (a; b), $x \in$ (a; b) из $x > x_0$ следует, что $f(x) > f(x_0)$, а из $x < x_0$ следует, что $f(x) < f(x_0)$. В обоих случаях

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

а следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

т.е. $f'(x_0) \geq 0$.

Теорема 2 (необходимое условие убывания функции). **Если дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in$ (a; b), убывает на интервале (a; b), то $f'(x_0) \leq 0$ для любого $x_0 \in$ (a; b).**

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущей.

Достаточные признаки монотонности функции вытекают из следующих двух теорем, которые приведем без доказательства.

Теорема 3 (достаточное условие возрастания функции). **Если дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in$ (a; b) имеет положительную производную в каждой точке интервала (a; b), то эта функция возрастает на интервале (a; b).**

Теорема 4 (достаточное условие убывания функции). **Если дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in$ (a; b) имеет отрицательную производную в каждой точке интервала (a; b), то эта функция убывает на интервале (a; b)** (доказать самостоятельно).

Пример. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Вычислим производную функции и сравним ее с нулем:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4 + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Если $x < 1$ и $x > 3$, то $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает для всех $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Если $1 < x < 3$, то $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция убывает на интервале $(1; 3)$.

3. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

3.1. Понятие экстремума функции

Определение. **Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой минимума этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство**

$$f(x) > f(x_0).$$

Определение. **Точка x_0 из области определения функции $f(x)$ называется точкой максимума этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство**

$$f(x) < f(x_0).$$

Определение. **Точки минимума и максимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках называются экстремумами функции.**

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 3.1).

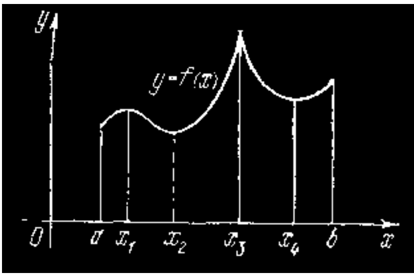


Рис. 3.1

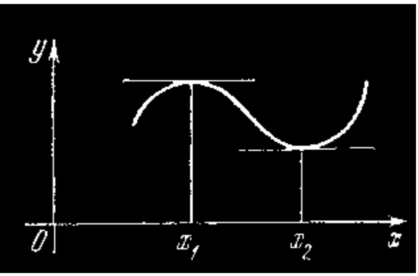


Рис. 3.2

Точки x_1 и x_3 являются точками максимума, а x_2 и x_4 – точками минимума. Из рис. 3.1 видно, что минимум в точке x_4 больше максимума данной функции в точке x_1. Это объясняется тем, что экстремум функции связан с определенной δ-окрестностью точки экстремума, а не со всей областью определения функции. По этой причине употребляется термин "локальный экстремум", т.е. экстремум, связанный с данным местом. Этим же объясняется и тот факт, что точки a и b не относятся к точкам экстремума. Для них не существуют δ-окрестности, принадлежащие области определения функции.

3.2. Необходимые условия существования экстремума

Необходимые условия существования экстремума дает теорема Ферма, которая известна из школьного курса.

***Теорема Ферма*. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.**

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: *касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке, удовлетворяющей условиям теоремы, параллельна оси абсцисс* (рис. 3.2).

Замечание 1. Обращение в ноль производной в точке экстремума является необходимым, но не достаточным условием. То есть обратное утверждение "если $f'(x_0) = 0$, то точка x_0 является точкой экстремума", вообще говоря, неверно.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^3$, тогда $y' = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, но по графику кубической параболы можно убедиться, что точка $x = 0$ – точкой экстремума не является.

Замечание 2. В теореме Ферма говорится о том, как ведет себя производная первого порядка в точке экстремума, если эта производная существует. Однако в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ имеет минимум, а $f'(0)$ – не существует (см. необходимое условие дифференцируемости функции).

Таким образом, учитывая теорему Ферма и замечания, необходимое условие существования экстремума функции в точке можно сформулировать следующим образом.

***Теорема*. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то в этой точке производная первого порядка либо обращается в ноль, либо не существует.**

Определение. **Точки, в которых $f'(x) = 0$ – называются стационарными. Точки, в которых $f'(x)$ не существует – критическими.**

3.3. Достаточные условия существования экстремума

Теорема 1 **(первое достаточное условие). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в некоторой ее δ-окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда:**

1) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума;

2) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума;

3) если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

3.4. Правило исследования функции на экстремум

1. Найти область определения функции.

2. Найти $f'(x)$, стационарные и критические точки.

3. Исследовать полученные точки с помощью первого достаточного условия, сделать вывод.

Пример. Исследовать функцию на экстремум

$$f(x) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}\ .$$

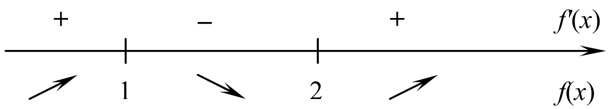
1. $D(f)$: $(-\infty; +\infty)$

2. $f'(x) = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ – стационарная точка

$f'(x)$ не существует $\Leftrightarrow$ $x = 2$ – критическая точка.

3.



$x = 1$ – точка максимума (max)

$x = 2$ – точка минимума (min)

4. $f_{max} = f(1) = 3$, $f_{min} = f(2) = 0$

Теорема 2 (второе достаточное условие). **Если функция $y = f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x) = 0$, а $f''(x) \neq 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$** (приведем теорему без доказательства).

Сформулированная теорема применима только для стационарных точек, рассмотрим это на конкретном примере.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4$$

1. Находим производную

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4\right)'=x^2-4x+3$$

2. Решая уравнение $x^2-4x+3=0$, находим стационарные точки: $x_1=1$ и $x_2=3$.

3. Находим вторую производную $f''(x)=(f'(x))'=2x-4$

4. Определяем знак второй производной в стационарных точках, для чего вычисляем $f''(1)=-2<0$ и $f''(3)=2>0$.

Следовательно, $x_1=1$ – точка максимума, а $x_2=3$ – точка минимума.

5. Вычисляем максимальное и минимальное значения функции

$$y_{\max}=f(1)=-2\frac{2}{3},\quad y_{\min}=f(3)=-4.$$

3.5. План исследования функции и построения графика с помощью производной первого порядка

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти множество значений функции $E(f)$.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на четность (нечетность).
5. Исследовать на периодичность.
6. Найти $f'(x)$, стационарные и критические точки.
7. Найти промежутки возрастания, убывания, точки экстремума.
8. Построить график функции, при необходимости найти дополнительные точки.

Пример. Построить график функции с помощью производной первого порядка $y=-\dfrac{6\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{(x^2-8x+24)}$.

1. $D(x):R$
2. $E(x):\left[-2\sqrt[3]{2};0\right]$

3. точки пересечения с осями координат: $0X\,(6;\,0)$, $0Y\,(0;\,-1{,}5)$

4. функция общего вида, так как $\begin{cases} y(x) \neq y(-x) \\ y(x) \neq -y(-x) \end{cases}$

5. функция не периодическая

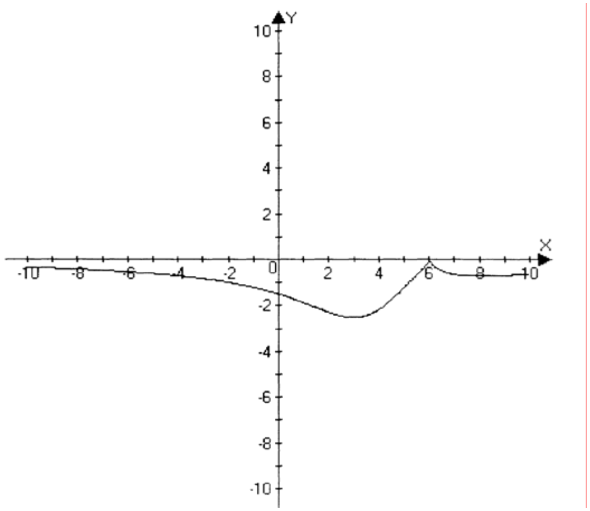
6. $y'(x) = 8\sqrt[3]{6}\,\dfrac{x^2 - 11x + 24}{\left(x^2 - 8x + 24\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x-6}}$

$y'(x) = 0$	$y'(x)$ не существует
$x^2 - 11x + 24 = 0$	$\left(x^2 - 8x + 24\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x-6} = 0$
$x_1 = 8;\quad x_2 = 3$	$x = 6$
стационарные точки	критические точки

7.

x	$(-\infty;\,3)$	3	$(3;\,6)$	6	$(6;\,8)$	8	$(8;+\infty)$
$y'(x)$	–	0	+	не сущ.	–	0	+
$y(x)$	убыв.	$-2\sqrt[3]{2}$	возр.	0	убыв.	$-\dfrac{3}{4\sqrt[3]{9}}$	возр.
		min		*max*		*min*	

8.



Р и с. 3.3

3.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на монотонность функции:

а) $y = 3\sin x - 4\cos x$

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

в) $y = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

2. Найти точки экстремума функций:

а) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

б) $y = x^3 \cdot e^{-x}$

в) $y = x^2 - \ln(1+2x)$.

3. Исследовать (с помощью второго достаточного условия) на экстремум функции:

а) $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$

б) $y = \dfrac{e^x}{x}$

в) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

г) $y = \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$.

4. Построить графики функций с помощью производной первого порядка:

а) $y = -\dfrac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}$ б) $y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$.

4. ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

4.1. Выпуклость графика функции

При исследовании поведения функции и формы её графика полезно установить, на каких интервалах график функции обращен выпуклостью вверх, а на каких – выпуклостью вниз. Прежде всего выясним понятие выпуклости графика функции, имеющей на некотором интервале непрерывную производную.

Определение 1. **График функции $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если график расположен ниже любой касательной, проведенной к графику функции в точках $(a; b)$** (рис. 4.1).

Определение 2. **График функции $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой касательной, проведенной к графику функции в точках $(a; b)$** (рис. 4.2).

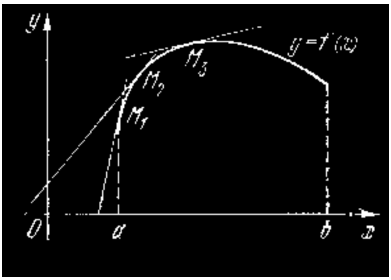


Рис. 4.1

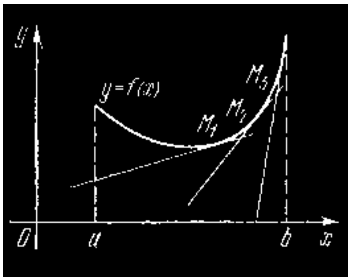


Рис. 4.2

Теорема (достаточное условие выпуклости графика функции). **Если на интервале $(a; b)$ дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет отрицательную (положительную)**

вторую производную, то график функции обращен выпуклостью вверх (вниз) (доказать самостоятельно).

Исследовать на выпуклость (вогнутость) график функции $y = f(x)$ означает найти те интервалы из области её определения, в которых вторая производная $f''(x)$ сохраняет свой знак.

Заметим, $f''(x)$ может менять свой знак при переходе через точки, в которых она обращается в ноль или не существует. Такие точки принято называть точками "подозрительными на перегиб" или критическими точками второго рода.

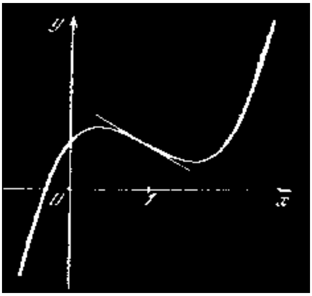
Пример. Исследовать на выпуклость график функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Данная функция определена на всей числовой прямой. Находим критические точки второго рода

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2,\quad f''(x) = 6x - 6,\quad 6x - 6 = 0,\quad$ т.е. $x = 1$

Для всех $x > 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ – вогнута на $(1; +\infty)$ и выпукла для всех $x \in (-\infty; 1)$ (рис. 4.3).



Р и с. 4.3

4.2. Точки перегиба

Определение. **Точка графика непрерывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба.**

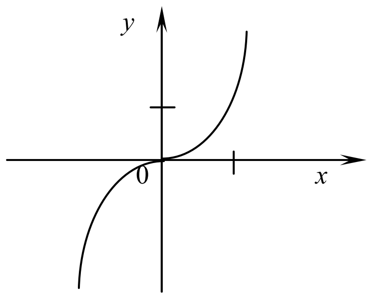
Согласно определению, в точке перегиба касательная к графику функции с одной стороны расположена выше графика, а с другой – ниже или наоборот, т.е. в точке перегиба касательная пересекает кривую (рис. 4.3).

Теорема (необходимое условие существования точки перегиба). **Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывные производные**

до второго порядка включительно на интервале $(a; b)$ и точка $(x_0; f(x_0))$, где $x_0 \in (a; b)$, является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Так как точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба, то слева и справа от x_0 функция $f''(x)$ имеет равные знаки. Но тогда в силу непрерывности второй производной имеем $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Точка $(x_0; f(x_0))$ может являться точкой перегиба для кривой $y = f(x)$, но $f''(x_0)$ – может при этом не существовать.



Р и с. 4.4

Пример. $y = \sqrt[3]{x^5}$, $\quad y'' = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$.

Из рис 4.4 следует, что $x = 0$ является точкой перегиба кривой, но $y''(0)$ – не существует.

Поэтому необходимое условие существования точек перегиба можно сформулировать иначе.

Теорема. **Если точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или не существует.**

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). **Если функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$ и при переходе через $x_0 \in (a; b)$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.**

Поскольку $f(x)$ дифференцируема в $(a; b)$, то существует касательная в точке x_0. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ график функции выпуклый, а при $x > x_0$ – вогнутый. Таким образом, точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

4.3. Правило нахождения точек перегиба функции

1. Установить область определения функции.
2. Найти $f''(x)$, точки в которых $f''(x)$ обращается в ноль или не существует.
3. Исследовать полученные точки на перегиб с помощью достаточного условия.

Пример. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Функция определена и непрерывна на множестве R.
2. $$y'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$
$y''(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	$\cup$	$\frac{3}{4}$	$\cap$	$\frac{3}{4}$	$\cup$

Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ – являются точками перегиба; на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ – кривая вогнута; на $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – кривая выпукла.

5. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

5.1. Классификация асимптот графика функции

Определение. **Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) -$ $- kx - b) = 0$.**

Отсюда $(f(x) - kx - b) = \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем $k = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{b + \alpha(x)}{x}$, $b = f(x) - kx - \alpha(x)$. Отсюда

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{5.1}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx). \tag{5.2}$$

Имеет место и обратное: из (5.1) и (5.2) следует, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. По формулам (5.1) и (5.2) вычисляются угловой коэффициент k и начальная ордината b асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется и находится асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Очевидно, что если $k = 0$, то уравнение асимптоты примет вид $y = b$.

Определение. **Асимптота, определяемая уравнением $y = \mathrm{const}$, называется горизонтальной асимптотой.**

Определение. **Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.**

Для определения вертикальных асимптот надо отыскать те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Чаще всего это точки разрыва второго рода данной функции.

Пример. Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2+1}{x-2} = -\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Находим

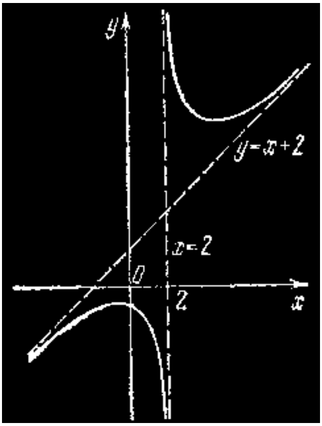
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2.$$

Итак, $y = x + 2$ является наклонной асимптотой данной функции при $x \to \pm\infty$.

Таким образом, данная функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную $y = x + 2$ (рис. 5.1)



Р и с. 5.1

5.2. Общее правило исследования функции и построения графика

С учетом изложенного выше материала можно придерживаться следующей схемы исследования функции и построения её графика:

1. Установить область определения и множество значений функций. Если последнее выполнить затруднительно, то можно определить $E(f(x))$ по графику.

2. Исследовать функцию на четность, нечётность.

3. Исследовать функцию на периодичность.

4. Исследовать функцию на непрерывность, выяснить наличие вертикальных асимптот.

5. Найти точки пересечения с осями координат.

6. Найти $f'(x)$, интервалы возрастания, убывание, точки экстремума.

7. Найти $f''(x)$, интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

8. Построить график функции, при необходимости найти дополнительные точки.

Пример. Провести полное исследование функции и построить её график: $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$.

1. $D(y) : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
   $E(y) : x \in (-\infty; +\infty)$

2. $y(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 4}{(-x)^2} = -\dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ – функция общего вида

3. не периодичная

4. $x = 0$ – вертикальная асимптота

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = -\infty.$$

5. Точки пересечения с осями координат:

$$0x : \begin{cases} x^3 - 4 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt[3]{4}; 0)$$

$0y : y(0)$ – не существует

6. $y' = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}$

$x = -2$ – стационарная точка
$x = 0$ – критическая точка

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$
y	$\uparrow$	-3	$\downarrow$	не сущ.	$\uparrow$

$x = -2$ – точка максимума

$y_{max} = y(-2) = -3$

$f(x)$ – возрастает для $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ и убывает для $x \in (-2; 0)$.

7. $y'' = \left(\dfrac{x^3+8}{x^3}\right)' = \dfrac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2(x^3+8)}{x^6} = -\dfrac{24}{x^4} < 0$

для всех $x \in D(y) \Rightarrow$ $f(x)$ выпукла на всей области определения.

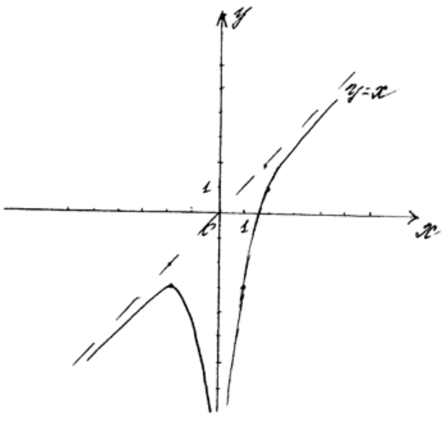
8. $k = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4}{x^3} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-4}{x^2} - x\right) = 0$

$y = x$ – наклонная асимптота

9. $y(1) = -3$, $y(2) = 1$.

Строим график



Р и с. 5.2

5.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать на выпуклость графики функций:

а) $y = x + \dfrac{6}{x}$

б) $y = x \cdot e^x$

в) $y = \dfrac{x-5}{x+7}$

г) $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$.

2. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$

б) $y = 5 + \sqrt[3]{x-4}$

в) $y = \ln\,(x^2 + 4)$

г) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

3. Найти асимптоты кривых и, не исследуя, выполнить схематический чертеж их графиков:

а) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$

б) $y = \dfrac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

в) $y = 4 - \dfrac{\sin x}{x}$

г) $y = \sqrt{1 + x^2} - 2x$.

4. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$

б) $y = \ln\dfrac{x}{x-2} - 2$

в) $y = -\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$

г) $y = (x-2)\cdot e^{3-x}$

д) $y = e^{-\sin x - \cos x}$

е) $y = \ln\,(\sqrt{2}\cdot\cos x)$.

6. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

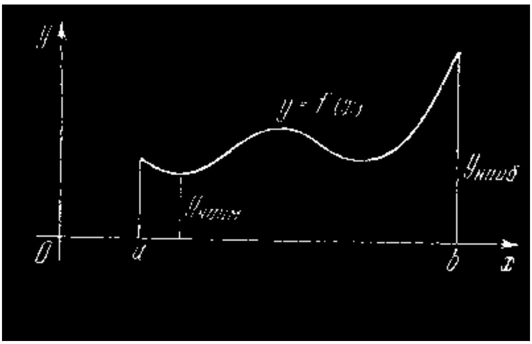
Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках этого отрезка и имеет на нем конечное число критических точек первого рода; требуется найти её наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[a, \mathrm{b}]$.

Если данная функция монотонна на отрезке $[a; b]$, то наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах этого отрезка, а именно:

1) если функция $f(x)$ возрастающая, то $f(a)$ – наименьшее значение и $f(b)$ – наибольшее значение;

2) если функция $f(x)$ убывающая, то $f(a)$ – наибольшее значение и $f(b)$ – наименьшее

Если функция $f(x)$ не является монотонной, то своего наибольшего значения $y_{\text{наиб}}$ на отрезке $[a; b]$ она достигает либо в одной из точек максимума, либо на одном из концов отрезка. Точно так же наименьшего значения $y_{\text{наим}}$ на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ достигает либо в одной из точек минимума, либо на одном из концов отрезка $[a; b]$ (рис. 6.1).



Р и с. 6.1

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, нужно:

1) установить непрерывность функции на отрезке $[a; b]$;

2) найти стационарные и критические точки данной функции;

3) вычислить значения функции в тех точках которые принадлежат интервалу (a; b), и на концах отрезка [a; b];

4) из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2}(x+1)^{2/3} \cdot (x-2)^{1/3}$ на [–2; 5].

1. Функция определена и непрерывна на [–2; 5].

2. Производную первого порядка вычислим применяя метод логарифмического дифференцирования:

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-2)$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} = \frac{2x-4+x+1}{3(x+1)(x-2)} = \frac{3x-3}{3(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

$$y' = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{(x+1)^{2/3} \cdot (x-1)(x-2)^{1/3}}{(x+1)(x-2)} = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{x-1}{(x+1)^{1/3}(x-2)^{2/3}}$$

$x = 1$ – стационарная точка $\in$ [–2; 5]

$x = -1$ и $x = 2$ – критические, так же $\in$ [–2; 5]

3. $y(-2) = -2$ $\quad$ $y(2) = 0$

$y(-1) = 0$ $\quad$ $y(5) = 6$

$y(1) = -2$

наим. $y(x) = y(-2) = y(1) = -2$ $\quad$ [–2; 5]

наиб. $y(x) = y(5) = 6$ $\quad$ [–2; 5]

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач.

При этом часто применяют следующее свойство непрерывных функций, которое мы приводим без доказательства.

Если функция непрерывна на некотором промежутке (открытом или закрытом) и имеет единственный экстремум, то он является ее наименьшим значением в случае минимума и наибольшим – в случае максимума.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций называются также задачами на максимум и минимум. Заметим, что практический интерес обычно имеют не сами максимумы или минимумы, а значения аргумента, при которых они достигаются.

Задача 5. Найти асимптоты и построить графики функций.

1. $y = \dfrac{17 - x^2}{4x - 5}$

2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

3. $y = \dfrac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$

4. $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}$

5. $y = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}$

6. $y = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

7. $y = \dfrac{2x^2 - 6}{x - 2}$

8. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$

9. $y = \dfrac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$

Задача 6. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

2. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

3. $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$

4. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$

5. $y = \dfrac{12x}{x^2 + 9}$

6. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

7. $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$

8. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

9. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$

10. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2}$

11. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

12. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

13. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$

14. $y = \dfrac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$

15. $y = -\dfrac{8x}{x^2 + 4}$

16. $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2$

17. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

18. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Власов В.Г.* Конспект лекций по высшей математике. М.: Рольф, 1996.

2. *Гусак А.А.* Высшая математика. В 2-х т. Минск: Петра Система, 2000.

3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Л.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч. М.: Высш. шк., 1996.

4. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ: в 2-х т. М.: Высш. шк., 1980.

5. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учеб. пособ. 4-е изд.; стер. –СПб.: Изд-во "Лань", 2005.

6. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. В 2- х т. М.: Наука, 1975.

7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. М.: Интеграл-Пресс, 1997.

8. Высшая математика. Исследование функций и построение графиков с применением ПК **: Уч. пособ. / *И.П. Егорова*. Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2005. 53 с.**