Министерство образования и молодежной политики
Республики Коми
«Сыктывкарский политехнический техникум»

Методическое пособие
по математике

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные теоретические положения

Сыктывкар, 2016

Составитель: Орлова Светлана Владимировна
Одобрено на заедании ЦК ____________ протокол № _______________
от _________________________

Пояснительная записка

Данное методическое пособие предназначено для студентов «Сыктывкарского политехнического техникума» и содержит материал включающий основные понятия комплексного числа и действия над комплексными числами.

Раздел 5. Комплексные числа

1. Основные понятия комплексного числа

Понятия <u>комплексные или мнимые числа</u> впервые начали применяться при решении квадратных уравнений. Когда дискриминант получался меньше нуля (D<0), в школе мы могли слышать фразу: «уравнение не имеет решения», но нас вводили в заблуждение. На самом деле, все это делалось в благих намерениях, ведь большая часть школьников не сможет осознать, что такое комплексное число, потому как представить себе его нельзя. Со временем комплексные числа нашли свое применение в разных отраслях, одной из них стала электротехника.

Обозначение мнимой единицы предложил Эйлер, он взял первую букву латинского слова "imaginarius", что в переводе означает «мнимый». Мнимая единица равна корню квадратному из минус одного:

$$i = \sqrt{-1}$$

А при возведении мнимой единицы в квадрат, применив элементарные математические операции, мы получим -1:

$$i^2 = -1$$

Множество всех комплексных чисел обозначаются **C**.

Существуют три различных формы записи комплексных чисел:

- алгебраическая;
- показательная;
- тригонометрическая.

<u>Алгебраическая форма</u> комплексного числа состоит из действительных, вещественных значений (a, b) и *i* – мнимой единицы. Комплексное число в алгебраической форме имеет вид a+b*i*, где a– действительная и b*i* – мнимая части.

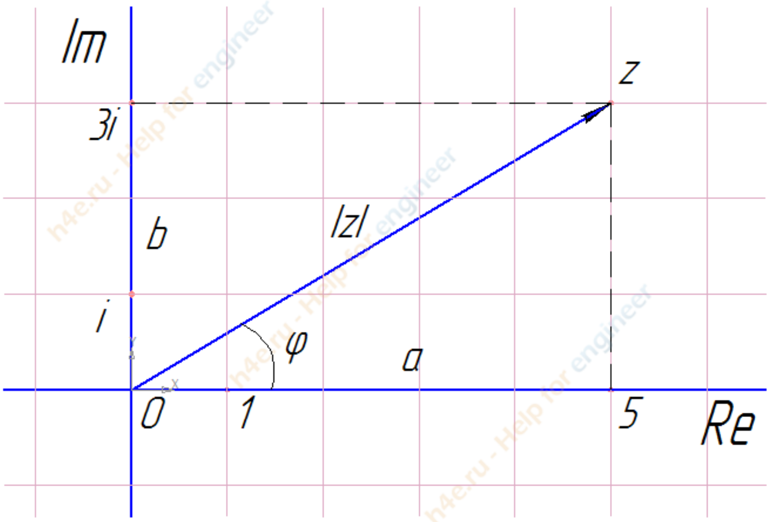


Рисунок 1 – Построение комплексного числа на плоскости (в системе координат).

На вышеприведенном рисунке изображена комплексная плоскость, которую создают оси:

- действительная ось Re (real);
- мнимая ось Im (imaginarius).

Т.е. если на плоскости по оси абсцисс расположить действительную часть, а по оси ординат — мнимую, то комплексному числу будет соответствовать точка с декартовыми координатами x и y (или её радиус-вектор, что тоже самое), а модуль и аргумент будут полярными координатами этой точки. Такая плоскость называется комплексной.

В качестве примера на плоскости уже построено комплексное число 5+3i. По действительной оси было отложено a=5, и по мнимой b=3. Поднимем перпендикуляры с осей. Соединим образовавшуюся точку пересечения с нулем. Таким образом, мы получим радиус-вектор. Модуль комплексного числа (|z|) – это длина полученного радиус-вектора, или, другими словами, это расстояние от точки на комплексной плоскости до начала координат. Рассчитывается модуль комплексного числа по формуле:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

На рисунке 1 вектор z образовывает с действительной осью угол - аргумент комплексного числа, который легко находится:

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Значения a и b можно выразить через радиус-вектор и угол фи (прямоугольный треугольник с углом φ, прилегающим катетом a, гипотенузой |z|):

$$a = |z| \cdot cos\varphi$$

$$b = |z| \cdot sin\varphi$$

Тогда, подставив полученные значения в алгебраическую форму, мы выведем следующую форму:

$$z = a + bi = |z| \cdot cos\varphi + |z| \cdot sin\varphi \cdot i = |z| \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$$

Тригонометрическая форма комплексного числа выражена из алгебраической и имеет вид:

$$z = |z| \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$$

Таким образом любое комплексное число можно преобразовать в любую из трех форм.

Показательная (экспоненциальная) форма комплексного числа имеет следующее равенство с алгебраической:

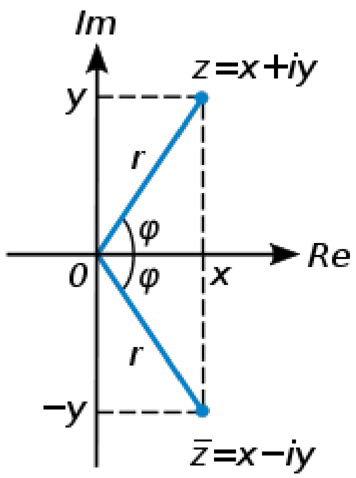
$$a + bi = |z|e^{i\varphi}$$

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Замечание: Комплексные числа являются равными, только если у них равны и действительные, и мнимые части.

Сопряжённые числа. Если комплексное число $z_1 = x + iy$, то число $z_2 = x - iy$ называется сопряжённым (или комплексно-сопряжённым) к z_1.

Отметим, что для пары комплексных чисел z_1 и z_2 модуль их разности: $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между соответствующими точками комплексной плоскости.



Геометрическое представление сопряжённых чисел.

Сопряжённые комплексные числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно вещественной оси.

В геометрическом представлении сумма комплексных чисел соответствует векторной сумме соответствующих векторов. При перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Если модуль второго сомножителя равен 1, то умножение на него геометрически означает поворот радиус-вектора первого числа на угол, равный аргументу второго числа. Этот факт объясняет широкое использование комплексного представления в теории колебаний.

Матричная модель. Комплексные числа можно также определить как семейство вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

с обычным матричным сложением и умножением. Действительной единице будет соответствовать

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мнимой единице — $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Математические действия над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел необходимо осуществлять в алгебраической форме, если число представлено в иной форме, нужно перевести его в алгебраическую, воспользовавшись калькулятором, или же вручную по формулам ниже:

Сложение

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(5 + 3i) + (2 + i) = (5 + 2) + i(3 + 1) = 7 + 4i$$

Вычитание

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$(5 + 3i) - (2 + i) = (5 - 2) + i(3 - 1) = 3 + 2i$$

Умножение и деление комплексных чисел, возможно, реализовать как в алгебраической, так и в показательной формах. Но намного практичней осуществлять действие в показательной форме, этот способ займет намного меньше времени при расчете, например, токов короткого замыкания.

Умножение

Алгебраическая форма:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2) + (ia_1 b_2 + ia_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$(5 + 3i) \cdot (2 + i) = (5 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + i(5 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = 7 + 11i$$

Показательная форма:

$$ae^{i\varphi_1} \cdot be^{i\varphi_2} = a \cdot b \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$(5 + 3i) \cdot (2 + i) = 5{,}831e^{i30{,}964^\circ} \cdot 2{,}236e^{i26{,}565^\circ} = 13{,}038e^{i57{,}529^\circ} = 6{,}9997 + 11i$$

Комплексно-сопряженными называются числа, у которых действительные части равны, а знак перед мнимой единицей – разный.

Сложение сопряженных чисел:

$$(a + ib) + (a - ib) = a + a + ib - ib = 2a$$

$$(5 + 3i) + (5 - 3i) = 5 + 5 + 3i - 3i = 10$$

Умножение комплексно-сопряженных:

$$(a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + iab - iab - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

$$(5 + 3i) \cdot (5 - 3i) = 5^2 + 15i - 15i + 3^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

При делении комплексных чисел в алгебраической форме необходимо избавиться от мнимой составляющей в знаменателе. Для этого числитель и знаменатель домножают на число, сопряженное знаменателю.

Деление

Алгебраическая форма:

$$\frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + i\frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$$

$$\frac{(5 + 3i)}{(2 + i)} = \frac{(5 + 3i) \cdot (2 - i)}{(2 + i) \cdot (2 - i)} = \frac{5 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{2^2 + 1^2} + i\frac{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1}{2^2 + 1^2} = \frac{13}{5} + i\frac{1}{5} = 2{,}6 + 0{,}2i$$

Показательная форма:

$$\frac{ae^{i\varphi_1}}{be^{i\varphi_2}} = \frac{a}{b}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{(5 + 3i)}{(2 + i)} = \frac{5{,}831e^{i30{,}964}}{2{,}236e^{i26{,}565}} = 2{,}6078e^{i4{,}399} = 2{,}6001 + 0{,}20002i$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика: Учеб. для немат. спец. вузов / Под. ред. акад. А.Н. Тихонова. 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1990.
2. Математика: учебное пособие / В.П.Омельченко, Э.В. Курбатова. – Изд. 7-е, стер. – Ростов н/Д: Феникс, 2013.
3. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии/ А.А. Бурдун, Е.А. Мурашко, М.М. Толкачев, А.С. Феденко; Под. ред. А.С. Феденко. – Мн.: Университетское, 1989.
4. Сборник задач по математике для техникумов (на базе средней школы): Учеб. пособие: Для техникумов/ О.Н. Афанасьева, Я.С. Бородский, И.И. Гуткин, А.Л. Павлов. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1992.
5. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский, М.: Наука, 1972.
6. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский, М.: Наука, 1972.
7. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. Образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. – 6-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2011.