Министерство образования и молодежной политики
Республики Коми
"Сыктывкарский политехнический техникум "

Методическое пособие
по математике

РЯДЫ

Основные теоретические положения

Сыктывкар, 2016

Составитель: преподаватель Орлова Светлана Владимировна

Одобреноназаседании ЦК ______________ протокол №_______

от ___________

Пояснительная записка

Данное методическое пособие предназначено для студентов "Сыктывкарского политехнического техникума" и содержит материал включающий основы числовых и функциональных рядов, степенных рядов, рядов Тейлора и Маклорена.

Содержание

1. Числовые ряды

1.1. Определение ряда. Сходимость ряда. Сумма ряда. Примеры

Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется **числовым рядом**.

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, член a_n с произвольным номером – *общим членом ряда*.

Примеры рядов:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} + \dots$$

Суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

называют **частичными суммами ряда** (1).

Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \qquad (2)$$

Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм при неограниченном возрастании номера n, т.е.:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S .$$

Предел последовательности частичных сумм сходящегося ряда называется **суммой ряда**. Символически это записывается так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если конечный предел последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Пример 1. Покажем, что ряд:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

сходится.

Решение. Возьмем сумму S_n первых n членов ряда:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Таким образом, ряд сходится и его сумма равна 1.

Перечислим простейшие *свойства сходящихся рядов*.

1. Если ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ сходится к сумме S, то и ряд $\lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_n+\ldots$, где λ – заданное число, также сходится и сумма его равна λS.

2. Если ряды: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ и $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ сходятся и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то ряд:

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots$$

также сходится и его сумма равна S_1+S_2.

3. Если ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ сходится, то сходится и ряд, полученный из данного отбрасыванием конечного числа членов.

На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется **n-м остатком ряда**, т.е.:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k . \qquad (5)$$

4. Для того чтобы ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad (1)$$

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Условие (1) является необходимым для сходимости числового ряда, но не достаточным.

Пример. Рассмотрим ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} . \qquad (2)$$

Такой ряд называется **гармоническим рядом**. Необходимый признак сходимости для этого ряда выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Докажем, что данный ряд расходится. Действительно, если бы этот ряд сходился, то, обозначая его сумму через S, мы бы имели:

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0 ,$$

но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ,$$

т.е. $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что равенство $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ невозможно, т.е. гармонический ряд расходится.

Далее покажем, что обобщенный гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ \ (p>1) \tag{3}$$

сходится.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Рассмотрим ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+\cdots, \tag{1}$$

который будем называть знакоположительным.

Из теоремы пределов известно, что числовая последовательность, монотонно возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел (***теорема А***).

Теорема В. Для того чтобы знакоположительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

В силу теоремы А последовательность частичных сумм ряда (1) имеет предел и, значит, ряд сходится.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов.

***Теорема 1* (признак сравнения).** Даны два знакоположительных ряда:

$$a_1+a_2+...+a_n+... \quad (a_n>0); \tag{2}$$

$$b_1+b_2+...+b_n+... \quad (b_n>0). \tag{3}$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$a_n\le b_n \quad (n=1,2,...). \tag{4}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если ряд (3) сходится, то сходится и ряд (2);

б) если расходится ряд (2), то расходится и ряд (3).

Доказательство. Обозначим через S_n и $\overline{S}_n$ частичные суммы рядов (2) и (3) соответственно. Из неравенства (4) следует оценка $S_n\le\overline{S}_n$ $(n=1,2,...)$.

Докажем утверждения теоремы.

1. Если ряд (3) сходится к сумме $\overline{S}$, то в силу теоремы В его частичные суммы ограничены. Ясно, что $\overline{S}_n \le \overline{S}$. Поэтому частичные суммы ряда (2) ограничены и, следовательно, ряд (2) сходится, и сумма его не превосходит $\overline{S}$.

2. Ряд (2) расходится и частичные суммы его возрастают, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ и, следовательно, ряд (3) расходится.

Отметим следующее:

1) ряд (3) называется *мажорантным* рядом по отношению к ряду (2);

2) для применения признака сравнения необходимо иметь стандартный набор сходящихся и расходящихся рядов, в частности, можно использовать геометрический ряд, гармонический и обобщенный гармонический ряды.

***Пример 1*.** Показать, что ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n+1} = \frac{5}{6+1} + \frac{5}{6^2+1} + \ldots + \frac{5}{6^n+1} + \ldots$$

сходится.

Решение. Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n}$, знаменатель которого $q = \frac{1}{6} < 1$, сходится. Поэтому сходимость исходного ряда следует из признака сравнения и неравенства $\frac{5}{6^n+1} \le \frac{1}{6^n}$ ($n \ge 1$).

***Пример 2*.** Показать, что ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

расходится.

Решение. Расходимость исходного ряда вытекает из расходимости гармонического ряда и неравенства $\frac{1}{2n+1} \ge \frac{1}{3n}$ ($n \ge 1$), если воспользоваться признаком сравнения.

Теорема 2 **(предельный признак сравнения).** Предположим, что для рядов с положительными членами (2) и (3) выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$, где K – положительное число. Тогда эти ряды ведут себя одинаково, т.е.:

а) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (3);

б) если расходится ряд (2), то расходится и ряд (3).

Пример 4. Доказать сходимость ряда из примера 3, пользуясь предельным признаком сравнения.

Решение. Используя для сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, вычисляем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^5+3n^3}:\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n^2+2)}{n^3(n^2+3)}=1>0.$$

В силу пункта а) теоремы получаем сходимость исходного ряда.

Пример 5. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{n^2+5n+4}$ расходится.

Решение. Действительно, сравним с гармоническим рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n^2+5n+4}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{n^2+5n+4}=3>0.$$

В силу пункта б) доказанной теоремы получаем расходимость исходного ряда.

Применение признаков сравнения иногда бывает затруднительно ввиду необходимости составлять вспомогательный ряд с известным поведением. Не существует универсальных рядов, с помощью которых можно судить о сходимости и расходимости конкретного ряда. Поэтому рассмотрим достаточные условия, позволяющие исследовать поведение ряда в зависимости от скорости стремления общего члена ряда к нулю.

Теорема 3 **(признак Даламбера).** Пусть для знакоположительного ряда $a_1+a_2+...+a_n+...$ существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=d$ (возможно, и бесконечность), тогда:

а) если $d<1$, то данный ряд сходится;

б) если $d>1$, то ряд расходится;

в) если $d=1$, то данный признак не дает ответа: ряд может как сходиться, так и расходиться, в этом случае требуется дополнительное исследование.

Проиллюстрируем на примерах все три положения теоремы 3.

***Пример 6*.** Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ сходится.

Решение. Напомним, что $n!$ (n-факториал) определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ и справедливо $(n+1)!=(n+1)n!$. Поэтому:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n+3)}{(n+1)!(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2n+3}{2n+1}=0.$$

Отсюда вытекает сходимость данного ряда [положение а) теоремы 3].

Замечания.

1. Признак Даламбера обычно применяют, когда общий член ряда содержит показательную функцию или факториал.

2. Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}=D_n$ называют вариантой Даламбера.

***Пример 7*.** Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ расходится.

Решение. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n^2}{3^n(n+1)^2}=3.$$

Осталось применить признак Даламбера, так как $d=3>1$.

Теперь продемонстрируем, что в случае $d=1$ [положение в)] ряд может как сходиться, так и расходиться.

***Пример 8*.** Рассмотрим гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится и для него $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

***Пример 9*.** Рассмотрим обобщенный гармонический ряд при $p=2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+....$$

Этот ряд сходится, но для него $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

Существуют ряды, для которых вместо признака Даламбера удобнее применить радикальный признак Коши.

***Теорема 4* (радикальный признак Коши).** Пусть для знакоположительного ряда $a_1+a_2+...+a_n+...$ существует предел $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (может быть и бесконечность), тогда:

а) если $\rho<1$, то ряд сходится;

б) если $\rho>1$, то ряд расходится;

в) если $\rho=1$, то ничего определенного сказать нельзя – ряд может как сходиться, так и расходиться.

***Пример 10*.** Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$ сходится.

Решение. Вычислим:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n+3}=\frac{2}{5}<1,$$

следовательно, выполняется положение а) теоремы 4.

***Пример 11*.** Показать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$ расходится.

Решение. Действительно, в этом случае:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1000}=\infty,$$

т.е. положение б) теоремы 4 выполняется.

Отметим, что если применим признак Даламбера, то поведение ряда исследуется и с помощью радикального признака Коши. С другой стороны, существуют ряды, о сходимости или расходимости которых можно судить по признаку Коши, а признак Даламбера приводит к случаю в).

1.4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

До сих пор мы рассматривали ряды со знакоположительными членами. Ряды с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами только множителем -1, поэтому вопрос об их сходимости решается аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению знакочередующихся рядов. Для удобства будем считать, что первый член такого ряда положителен. Тогда **знакочередующийся ряд** можно записать в виде:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \,, \qquad (1)$$

где $a_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots \qquad (2)$$

и стремятся к нулю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,, \qquad (3)$$

то ряд (1) сходится и сумма его не превосходит первого члена.

Следствие **(оценка остатка знакочередующегося ряда).**

Остаток знакочередующегося ряда (1) по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Действительно, если отбросить n-первых членов ряда (1), то остаток $r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$ является знакочередующимся рядом и, следовательно, его сумма в силу теоремы по абсолютной величине меньше первого члена a_{n+1}: $|r_n| \le a_{n+1}$.

1.5. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными* рядами. Его частным случаем является знакочередующийся ряд.

Сформулируем признак сходимости таких рядов.

Теорема **(достаточный признак сходимости числового ряда)**.

Пусть дан ряд:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (1)$$

члены которого имеют произвольные знаки. Тогда, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (2)$$

то сходится и данный ряд (1).

***Пример 1*.** Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2}\ldots, \qquad (3)$$

где α – любое число.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} = \frac{|\sin\alpha|}{1^2} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \frac{|\sin 3\alpha|}{3^2}\ldots \qquad (4)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\ldots. \qquad (5)$$

Члены ряда (4) не больше соответствующих членов ряда (5). Но ряд (5) сходится. Значит, ряд (4) также сходится, и в силу доказанной теоремы ряд (3) сходится.

Доказанный признак сходимости произвольного ряда является лишь достаточным, но не необходимым: существуют ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин членов ряда, расходятся.

***Пример 2*.** Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, как показано было в п.1.4, сходится, а ряд из абсолютных величин, являющийся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

Исходя из сказанного все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

Если ряд (1) сходится вместе с рядом, составленным из абсолютных величин его членов, то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно (**абсолютно сходящийся ряд**).

Из доказанной теоремы вытекает, что одной сходимости ряда (2) уже достаточно для абсолютной сходимости ряда (1).

Если ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда, расходится, то данный ряд (1) называется **условно сходящимся (неабсолютно сходящимся)**.

Пример 3. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+n+1}$ и установить характер сходимости (абсолютная, условная).

Решение. Применим к данному ряду признак Лейбница.

Первое его условие выполняется:

$$\frac{2}{3}>\frac{3}{6}>\frac{4}{13}>\frac{5}{21}>\dots.$$

Второе условие:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}=0$$

также выполняется. Следовательно, данный ряд является сходящимся.

Для того чтобы установить характер сходимости ряда, рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}.$$

Применим предельный признак сравнения (см. теорему 2, 1.3). Для сравнения используем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}=1>0.$$

Так как гармонический ряд является расходящимся, то и ряд, составленный из абсолютных величин членов рассматриваемого ряда, будет также расходящимся. Исходя из этого можно сделать вывод, что данный знакопеременный ряд сходится условно.

Надо отметить, что с абсолютно сходящимися рядами можно оперировать как с конечными суммами. В частности, сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов. Это **переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов**, которое не сохраняется для условно сходящихся рядов.

2. Степенные ряды. Ряды Тейлора

2.1. Функциональные ряды

Ряд:

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (1)$$

называется **функциональным**, если его члены являются функциями от переменной x. Давая переменной x определенные числовые значения, получаем сходящиеся или расходящиеся числовые ряды.

Если в точке x_0 ряд:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x_0)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости ряда* (1). Если этот ряд расходится, то x_0 – *точка расходимости ряда* (1).

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд (1) сходится, называется **областью сходимости** этого ряда.

Областью сходимости функциональных рядов часто бывает какой-нибудь промежуток числовой оси.

Пример 1. Ряд:

$$1+x+x^2+...+x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (2)$$

сходится в интервале (–1,1), так как при любом $|x|<1$ соответствующий числовой ряд есть геометрический ряд со знаменателем $q=x$. При $|x|\geq 1$ этот ряд расходится. Следовательно, область сходимости ряда (2) есть интервал (–1,1).

Теперь перейдем к рассмотрению одного из важнейших классов функциональных рядов, которыми являются степенные ряды.

2.2. Степенные ряды

Ряд вида:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (1)$$

называется **степенным рядом**.

Это функциональный ряд по степеням $1, x, x^2, ..., x^n, ...$, поэтому ряд начинается с члена a_0, который называется *свободным членом*. Для удобства n-м членом степенного ряда называют член $a_n x^n$, несмотря на то, что он стоит на ($n+1$)-м месте. Свободный член ряда a_0 считается нулевым членом степенного ряда.

Нас будет интересовать нахождение области сходимости степенного ряда.

Отметим прежде всего, что степенной ряд (1) сходится в точке 0.

Сформулируем **теорему Абеля**, на которой основано изучение области сходимости рядов (1).

Теорема 1.

а) Если степенной ряд (1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, в интервале $\left(-|x_0|, |x_0|\right)$, т.е. при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

б) Если степенной ряд (1) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всяком x, большем по абсолютной величине, чем $|x_1|$, т.е. при $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля показывает, что все точки сходимости степенного ряда (1) расположены ближе к началу координат, чем точки расходимости.

Надо отметить, что при исследовании сходимости степенных рядов можно использовать достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов, так как устанавливается абсолютная сходимость ряда.

Для степенного ряда (1) имеют место следующие случаи:

а) область сходимости ряда (1) состоит только из одной точки $x = 0$, т.е. ряд расходится для всех значений $x \neq 0$;

б) область сходимости ряда (1) состоит из всех точек оси Ox, т.е. ряд сходится при всех x;

в) область сходимости состоит больше, чем из одной точки, причем на числовой оси имеются как точки сходимости, так и точки расходимости. В этом случае существует такое положительное число R, что для всех

x, по модулю меньших R ($|x| < R$), ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R, ряд расходится.

Число R называют **радиусом сходимости степенного ряда** (1). Для пункта а) $R = 0$, а для пункта б) $R = \infty$.

Совокупность всех x, при которых степенной ряд (1) сходится, называется **интервалом сходимости ряда**.

Областью сходимости степенного ряда (1) является интервал $(-R, R)$, к которому в зависимости от конкретных случаев могут быть добавлены концевые точки $R, -R$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие сформулированные положения а) – в).

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n}{(n+1)|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{(n+1)} = |x| < 1,$$

следовательно, данный ряд сходится в интервале $-1 < x < 1$. Радиус сходимости $R = 1$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = 1$ и $x = -1$.

Подставляя $x = 1$ в исследуемый ряд, получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который является расходящимся.

При $x = -1$ получим знакочередующийся ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ $\ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$, который сходится на основании признака Лейбница.

В результате имеем областью сходимости промежуток $[-1, 1)$.

Данный пример соответствует положению в).

Пример 2. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Р е ш е н и е. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

т.е. ряд расходится при всех x. Этот случай соответствует положению б).

Отсюда в силу необходимого условия сходимости ряда вытекает, что $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ при $-\infty<x<\infty$.

Пример 3. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

Р е ш е н и е. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

т.е. ряд расходится при всех $x\neq 0$ [положение а)].

Рассмотрим свойства степенных рядов.

Сформулируем следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть степенной ряд:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

имеет интервал сходимости $(-R,R)$, тогда он равномерно сходится внутри интервала сходимости, т.е. ряд равномерно сходится на любом промежутке $[-r,r]$, где $0<r<R$.

Теорема 3 **(о непрерывности суммы степенного ряда).** Сумма степенного ряда:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.

Замечание. Если степенной ряд имеет интервал сходимости $(-R, R)$ и сходится на границе (например, при $x=R$), то сумма ряда непрерывна в точке сходимости (в точке $x=R$).

Радис сходимости можно определить по форме:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|a_n|}}$$

Мы рассмотрели степенные ряды вида (1), расположенные по степеням x.

Если исключить всюду расходящиеся (кроме точки 0) ряды, то для каждого такого ряда существует промежуток сходимости с центром в точке $x=0$ от $-R$ до R, где R – радиус сходимости, концы этого промежутка включаются или нет, смотря по случаю.

Рассмотрим степенные ряды более общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

расположенные по степеням $(x-x_0)$ (вместо x). Такой ряд не отличается существенно от ряда вида (1), ибо приводится к нему простой заменой $(x-x_0)=y$ с точностью до обозначения переменной.

Для этого ряда, если он не будет всюду расходящимся (кроме точки x_0), также существует промежуток сходимости, но на этот раз с центром в точке x_0: от x_0-R до x_0+R.

Концы его, как и в случае ряда (1), могут принадлежать, но могут и не принадлежать области сходимости.

2.3. Ряды Тейлора

Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы степенного ряда, то говорят, что $f(x)$ разложена в степенной ряд, а сама $f(x)$ называется порождающей функцией.

Из свойств степенных рядов следет, что функция $f(x)$ должна быть бесконечно дифференцируема:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

Итак, если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x-x_0$, то этот ряд имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots \quad (2)$$

Полученный ряд называется **рядом Тейлора функции** $\boldsymbol{f(x)}$, а его коэффициенты – *коэффициентами Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

В частном случае, при $x_0=0$, ряд (2) принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (3)$$

и называется **рядом Маклорена функции** $\boldsymbol{f(x)}$.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степени $x-x_0$, то этот ряд обязательно является ее рядом Тейлора (или Маклорена в случае $x_0=0$).

Следствие. Пусть $R>0$. Предположим, что $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ – степенные ряды, сходящиеся при $-R<x<R$. Если $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ ($-R<x<R$), то $a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Теорема 2. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке x функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора (Маклорена), необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $R_n(x)$ стремился к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

2.4. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Маклорена. Биномиальный ряд

1. Разложение в ряд Маклорена функции e^x.

Имеем $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$, откуда при $x=0$ получаем

$f'(0)=f''(0)=...=f^{(n)}(0)=1$. По формуле (3) составим ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad (1)$$

оторый сходится на всей числовой оси.

2. Разложение функции $\sin x$.

Имеем $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(IV)}(x)=\sin x$, ... При $x=0$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(IV)}(0)=0, ...$.

В результате получаем:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \qquad (2)$$

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}:\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2n(2n+1)}=0,$$

т.е. ряд сходится абсолютно на всей числовой оси.

Для рядов (1) и (2) можно доказать теорему 3 из п.2.3, т.е. оба ряда сходятся к порождающим их функциям.

3. Разложение в ряд Маклорена функции $\cos x$ может быть получено дифференцированием степенного ряда (2), т.е.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+..+(-1)\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{x^{2n}}{(2n)!} \ (-\infty<x<\infty). \qquad (3)$$

Разложение (3) исследуется с помощью теоремы 3 п.2.3, как и разложение $\sin x$.

Таким образом, на этих примерах показано, что при разложении функции в ряд Маклорена сначала нужно получить производные в точке $x=0$ и составить ряд, а затем найти интервал сходимости и с помощью теоремы 3 п.2.3 доказать его сходимость к порождающей функции или исследовать остаточный член в интервале сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. М., 1998.

*2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М., 2003.

Дополнительная

*3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. М., 1969.

*4. Толстов Г.М. Ряды Фурье. М., 1980.

*5. Шипачев В.С. Высшая математика. М., 2002.

6. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., 1969.

7. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М., 1973.

*8. Атанасян В.А., Виленкин Н.Я., Смолянский М.Л. Специальные главы математического анализа. М., 1966.

*9. Ellis R., Gulick D. Calculus. HBI, 1991.

*10. Хавинсон С.Я. Математический анализ. Юнита 1. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. М.: СГУ, 2000.

11. Глаголева Р.Я., Росовский Л.Е. Математический анализ. Юнита 2. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. М.: СГУ, 2000.

12. Рубинштейн А.И. Математический анализ. Юнита 3. Дифференциальные уравнения. М.: СГУ, 2000.

*13. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. В 2-х т. М., 1970.

*14. Осиленкер Б.П. Математический анализ. Юнита 4. Ряды. Ряды Фурье. М.: СГУ, 2000.

15. Баврин И.И. Высшая математика. М., 2001.